8 Aktivni filtri

Uvod

Prva značajna primena operacionih pojačavača ostvarena je u analognim računarima koji su korišćeni za simulaciju dinamičkih linearnih i nelinearnih sistema. Ovi sistemi mogu biti mehanički, termički, hemijski, kinetički i, naravno elektromehanički. Posle toga, operacioni pojačavači su našli široku primenu u aktivnim filtrima za komunikaciona i kontrolna kola.

Pored operacionih pojačavača za realizaciju aktivnih filtara koriste se otpornici i kondenzatori. Najvažnija prednost aktivnih filtara, koji predstavljaju savremeno alternativno rešenje klasičnim pasivnim RLC filtrima, je u tome što oni ne zahtevaju korišćenje induktivnosti. Mnogo je lakše napraviti 'skoro idealan' otpornik i kondenzator od 'idealnog' kalema.

Pored toga, realizacija aktivnih filtara za veoma niske frekvencije je mnogo jednostavnija, s obzirom da ne zahteva glomazne kalemove. Značajna prednost je i u modularnom projektovanju aktivnih filtara, što značajno pojednostavljuje postupak projektovanja filtara višeg reda.

Uvod

Za projektovanje aktivnih filtara neophodno je, pre svega, postaviti uslove koje on mora da ispuni. Zadovoljavanje zadatih specifikacija vrši se izborom oblika prenosne funkcije (odnos izlaznog i ulaznog napona) filtra i određivanjem njenog reda. S obzirom da izračunati red filtra najčešće nije ceo broj, treba odabrati prvi veći ceo broj za red filtra koji će svakako dobro aproksimirati postavljene zahteve. Često se umesto prenosne funkcije filtra posmatra funkcija slabljenja (odnos ulaznog i izlaznog napona) filtra, tj. recipročna vrednost prenosne funkcije. U nastavku ovog poglavlja biće više reči o problemima aproksimacije postavljenih zahteva.

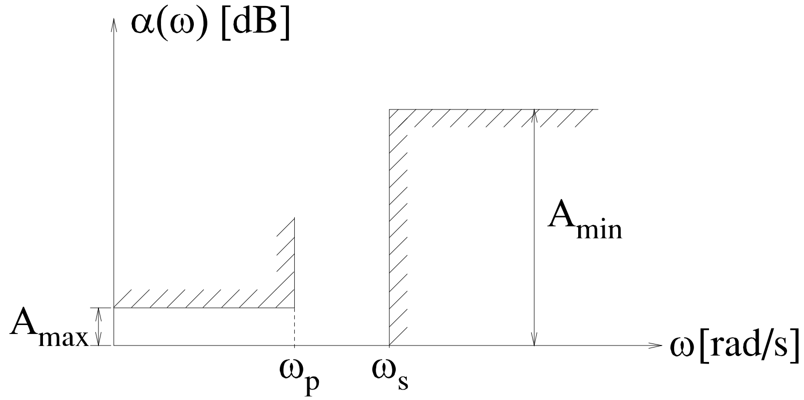
Aproksimacije

Zahtevi koje treba da zadovolji prenosna funkcija, odnosno funkcija slabljenja filtra mogu se posmatrati sa više stanovišta. Naime, mogu se postaviti zahtevi koje treba da zadovolji moduo ili faza, odnosno grupno kašnjenje, ili istovremeno i moduo i faza prenosne funkcije filtra. Ovom prilikom više reči biće o uslovima koje treba da ispuni moduo prenosne funkcije odnosno funkcije slabljenja filtra.

Aproksimacije

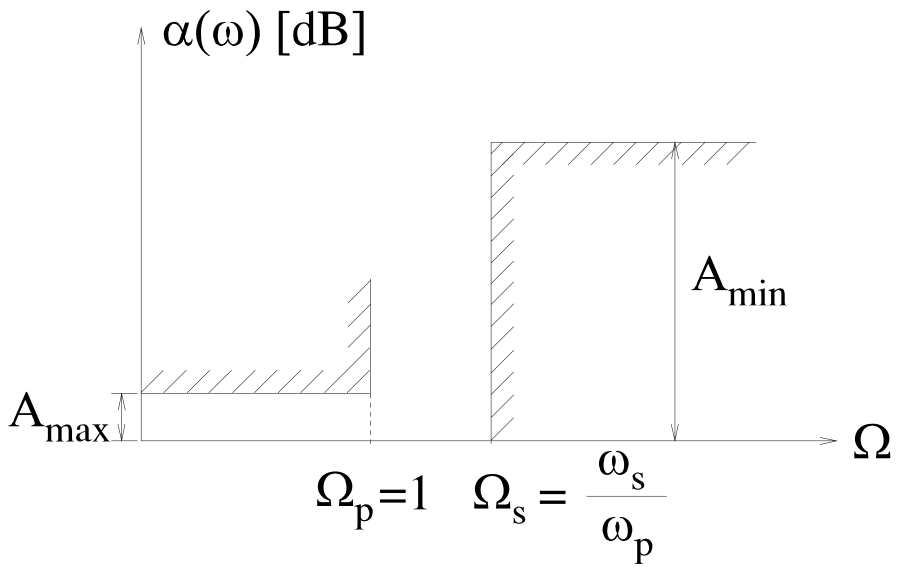
Na slici je prikazan gabarit koji treba da zadovolji moduo funkcije slabljenja *filtra propusnika niskih frekvencija* (NF filtra), a on je određen sledećim zahtevima:

- propusni frekvencijski opseg od 0 do ω_P (ω_P - granična frekvencija propusnog opsega)
- nepropusni frekvencijski opseg od ω_S do ∞ (ω_S - granična frekv. nepropusnog opsega)
- širina prelazne zone od ω_P do ω_S
- maksimalno dozvoljeno slabljenje u propusnom opsegu A_{max}
- minimalno dozvoljeno slabljenje u nepropusnom opsegu A_{min}



Aproksimacije

Ukoliko se izvrši *normalizacija (skaliranje) frekvencijske ose*, drugim rečima, ako se frekvencija podeli sa graničnom frekvencijom propusnog opsega ω_P ($\Omega = \omega/\omega_P$) dobija se gabarit takozvanog *prototipskog NF filtra* koji je prikazan na slici:



Aproksimacije

Određenim frekvencijskim transformacijama željeni gabariti i ostalih filtara, tj. *filtra propusnika visokih frekvencija* (VF filtra), *filtra propusnika opsega frekvencija* (PO filtra) i *filtra nepropusnika opsega frekvencija* (NO filtra) mogu se svesti na gabarit *prototipskog NF filtra*. Posle određivanja prenosne funkcije (funkcije slabljenja) prototipskog NF filtra koja ispunjava postavljene zahteve, odgovarajućim inverznim frekvencijskim transformacijama dobijaju se prenosne funkcije željenog filtra.

Aproksimacije

Prenosna funkcija filtra u opštem slučaju može biti predstavljena racionalnom funkcijom čiji je red polinoma u brojiocu ***m*** *manji ili jednak broju polinoma u imeniocu* ***n*** (*n* je red filtra):

$$H(s) = \frac{U_O(s)}{U_I(s)} = \frac{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_m s^m}{1 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_n s^n}$$

gde ***m*** nula polinoma u brojiocu prenosne funkcije predstavljaju nule prenosa (polove slabljenja), dok ***n*** nula polinoma u imeniocu prenosne funkcije predstavljaju polove prenosa (nule slabljenja).
Sa povećanjem reda filtra ***n*** raste selektivnost filtra, odnosno filtar može zadovoljiti strožije zahteve (manje A_{max}, veće A_{min} i uža prelazna zona)

Aproksimacije

Da bi prenosna funkcija filtra mogla biti *realno ostvarljiva* polovi prenosa moraju ležati u levoj poluravni kompleksne *s*-ravni, uključujući tom prilikom i negativni deo realne ose, dok nule prenosa mogu biti bilo gde u kompleksnoj *s*-ravni, tj. u levoj i desnoj poluravni kao i na realnoj σ- i imaginarnoj jω-osi. Kompleksne nule i polovi javljaju se uvek u konjugovano kompleksnim parovima.

Kako se sinteza svih filtara zasniva na sintezi prototipskog filtra propusnika niskih frekvencija to će sada biti nešto više reči o njima. Najjednostavniji oblik prenosne funkcije NF filtra je slučaj kada postoji samo polinom u imeniocu i konstanta u brojiocu, i takav filtar se naziva *polinomski* filtar. Nešto složeniji oblik imaju filtri *minimalne faze* koji mogu imati nule prenosa samo na imaginarnoj jω-osi (na osi realnih frekvencija - s=jω).

Prenosna funkcija propusnika niskih frekvencija polinomskih filtara može se predstaviti u sledećem obliku:

$$H(s)=\frac{1}{1+\varepsilon K_n(s)}$$

a moduo prenosne funkcije se dobija posle smene i iznosi: $H(\omega)=\left|H(j\omega)\right|=\dfrac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2 K_n^2(\omega)}}$

gde je ε normalizaciona konstanta, a $K_n(s)$, odnosno $K_n(\omega)$ karakteristična funkcija filtra.

Aproksimacije

Slabljenje filtra se obično izražava u *dB* i dato je izrazom:

$$\alpha(\omega) = 20\log\frac{1}{H(\omega)} = 10\log\left[1+\varepsilon^2 K_n^2(\omega)\right]$$

Ako se izvrši normalizacija frekvencijske ose graničnom frekvencijom propusnog opsega $\Omega=\omega/\omega_P$ tada je normalizovana granična frekvencija propusnog opsega jednaka jedinici, tj. $\Omega_P = \omega_P / \omega_P = 1$.

Ako se i karakteristična funkcija normalizuje tako da je: $K_n^2(\omega) = 1$,

onda slabljenje na graničnoj frekvenciji iznosi: $\alpha(\Omega_p) = 10\log\left[1+\varepsilon^2\right]$

To znači da *slabljenje na graničnoj frekvenciji* određuje konstanta ε. Ako želimo da na granici propusnog opsega slabljenje iznosi A_{max}(dB) tada je:

$$\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{1}{10}A_{max}} - 1}$$

Treba obratiti pažnju na to da kada je ε=1 slabljenje na granici propusnog opsega iznosi 3dB.

Aproksimacije

Uobičajeno je da se položaj polova definiše preko Q-faktora pola (Q_p) i modula pola (ω_P), a ne preko realnog (σ_1) i imaginarnog dela (ω_1). Njihova zavisnost data je sledećim izrazima:

$$\omega_p = \sqrt{\sigma_1^2 + \omega_1^2} \qquad\qquad Q_p = \frac{\omega_p}{2\sigma_1} = \frac{1}{2\cos\theta}$$

gde je θ ugao koji poteg iz koordinatnog početka do pola zaklapa sa negativnim delom realne ose.
Realni pol (leži na negativnom delu realne ose) ima θ=0 pa je njegov Q-faktor pola Q_P=0.5 , dok kompleksni polovi imaju veće vrednosti Q-faktora od 0.5 i njihova vrednost je utoliko veća što su polovi bliži imaginarnoj osi. Naravno, kada bi bilo moguće da se polovi nađu na imaginarnoj osi, vrednost Q-faktora pola bila bi beskonačna.

Butterworth-ova aproksimacija

Butterworth-ova aproksimacija prototipskog filtra propusnika niskih frekvencija *n*-tog reda ima najprostiji oblik karakteristične funkcije, koji je dat izrazom:

$$K_n(S) = S^n$$

Prenosna funkcija Butterworth-ove aproksimacije prototipskog NF filtra je:

$$H(S) = \frac{1}{1+\varepsilon S^n}$$

pa je kvadrat modula prenosne funkcije dat sa: $\left|H(j\Omega)\right|^2 = \dfrac{1}{1+\varepsilon^2\Omega^{2n}}$

Za Butterworth-ovu prenosnu funkciju se kaže da ima maksimalno ravnu amplitudsku karakteristiku, jer ima (2*n*-1) izvod u koordinatnom početku (Ω=0) jednak nuli. Polovi prenosne funkcije se mogu dobiti tako što se u normalizovani izraz za kvadrat modula uvede smena Ω=S/j i odrede nule polinoma u imeniocu, odnosno nule jednačine oblika: $1+(-1)^n\varepsilon^2 S^{2n} = 0$

i date su izrazom: $S_k = \dfrac{1}{\varepsilon^{1/n}}\exp\left(\dfrac{j\pi}{2}\dfrac{2k+n-1}{n}\right),\ k = 1,..,2n$

Butterworth-ova aproksimacija

Od ukupno $2n$ rešenja koja se ovom prilikom dobijaju treba odabrati samo ona koja se nalaze u levoj poluravni. Znači polovi prenosne funkcije se nalaze u levoj poluravni na polukrugu čiji je poluprečnik $1/(\varepsilon^{1/n})$, a raspoređeni su pod uglovima jednakim $\dfrac{\pi}{n}$

Oni se mogu predstaviti u sledećem obliku:

$$S_k = -\Sigma_k \pm j\Omega_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

gde je

$$\Sigma_k = \cos\left(\frac{(2k+n-1)\pi}{2n}\right)$$

$$\Omega_k = \sin\left(\frac{(2k+n-1)\pi}{2n}\right)$$

Prenosna funkcija se može napisati, korišćenjem izračunatih polova prenosne funkcije, u obliku:

$$H(S) = \frac{1}{\prod_{k=1}^{n}(S - S_k)}$$

gde se, naravno, (k=1,…,n) polova nalaze u levoj poluravni.

Butterworth-ova aproksimacija

Međutim, potrebno je odrediti red filtra *n* koji će zadovoljiti zadati gabarit prototipskog filtra. Polazi se od izraza za slabljenje:

$$\alpha(\Omega) = 10\log\left(1+\varepsilon^2\Omega^{2n}\right)$$

Red filtra *n* određuje se postavljanjem uslova za slabljenje na granicama propusnog i nepropusnog opsega. Najpre, na graničnoj frekvenciji propusnog opsega slabljenje može biti maksimalno A_{max}, odnosno

$$\alpha(\Omega_p) = A_{\max} = 10\log\left(1+\varepsilon^2\right)$$

Odavde se može izračunati: $\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{1}{10}A_{\max}} - 1}$

Na graničnoj frekvenciji nepropusnog opsega minimalno slabljenje može biti A_{min}:

$$\alpha(\Omega_s) = A_{\min} = 10\log\left(1+\varepsilon^2\Omega_s^{2n}\right)$$

Butterworth-ova aproksimacija

Koristeći ova dva granična uslova određuje se potreban red filtra za zadovoljavanje postavljenih zahteva i on je dat izrazom:

$$n = \frac{\log\left(\dfrac{10^{\frac{1}{10}A_{\min}} - 1}{10^{\frac{1}{10}A_{\max}} - 1}\right)}{2\log\Omega_s}$$

Izračunati red filtra n najčešće nije ceo broj te se on mora zaokružiti na prvi veći ceo broj, jer se time ostvaruju nešto strožiji zahtevi od postavljenih.
Prenosna funkcija se sada može, za određeni red filtra n, napisati na osnovu izračunatih polova prenosa pomoću već izvedenog izraza za položaje polova u kompleksnoj S-ravni ili korišćenjem, u literaturi poznatih, tabela sa elementima prenosne funkcije za određeni red filtra. Tabela 1 predstavlja skup takvih elemenata za redove filtara n od 1 do 5.

Butterworth-ova aproksimacija

Iz Tabele 1 se mogu, za dati red filtra, očitati odgovarajući polinomi u imeniocu prenosne funkcije normalizovanog odnosno prototipskog filtra:

Tabela 1

n	Imenilac H(S)
1	$S+1$
2	$S^2+1,41S+1$
3	$(S^2+S+1)(S+1)$
4	$(S^2+0,76537S+1)(S^2+1,84776S+1)$
5	$(S^2+0,61803S+1)(S^2+1,61803S+1)(S+1)$

Denormalizacija prototipske prenosne funkcije Butterworth-ovog filtra vrši se smenom:

$$S = s\left(\frac{\varepsilon^{1/n}}{\omega_p}\right)$$

Chebyshevljeva aproksimacija

Prenosna funkcija Chebyshevljeve aproksimacione funkcije NF filtra određena je karakterističnom funkcijom u obliku:

$$K_n(\Omega) = C_n(\Omega)$$

gde $C_n(\Omega)$ predstavlja Chebyshevljev polinom prve vrste, koji pripada klasi ortogonalnih polinoma i može se predstaviti izrazom:

$$C_n(\Omega) = \begin{cases} \cos(n\cos^{-1}\Omega), |\Omega| \leq 1 \\ \cosh(n\cosh^{-1}\Omega), |\Omega| > 1 \end{cases}$$

Kvadrat modula prenosne funkcije je dat izrazom:

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 C_n^2(\Omega)}$$

Chebyshevljeva aproksimacija

Polovi prenosne funkcije se mogu dobiti tako što se u normalizovani izraz za kvadrat modula uvede smena Ω=S/j i odrede nule polinoma u imeniocu, odnosno nule jednačine oblika:

$$1+\varepsilon^2 C_n^2\left(\frac{S}{j}\right)=0$$

i dati su izrazom:

$$S_k=\Sigma_k+j\Omega_k,\ k=1,\ldots,2n$$

gde je:

$$\Sigma_k=-\sin\left(\frac{2k+1}{n}\frac{\pi}{2}\right)\sinh\left(\frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

$$\Omega_k=\cos\left(\frac{2k+1}{n}\frac{\pi}{2}\right)\cosh\left(\frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

Polove prenosne funkcije Chebyshevljevog filtra treba, iz ovog skupa rešenja, odabrati tako što se uzme n rešenja koja leže u levoj poluravni. Inače, rešenja se nalaze na krivoj oblika elipse.

Chebyshevljeva aproksimacija

Red filtra *n* se, kao i u prethodnom slučaju određuje postavljanjem uslova za slabljenje na granicama propusnog i nepropusnog opsega. Najpre, na graničnoj frekvenciji propusnog opsega slabljenje može biti maksimalno A_{max}, odnosno:

$$\alpha(\Omega_p) = A_{\max} = 10\log\left(1+\varepsilon^2\right)$$

jer je $C_n(1)=1$ pa je i sada je: $\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{1}{10}A_{\max}} - 1}$

Na graničnoj frekvenciji nepropusnog opsega slabljenje može biti minimalno A_{min}, odnosno:

$$\alpha(\Omega_s) = A_{\min} = 10\log\left[1+\varepsilon^2 C_n^2(\Omega_s)\right]$$

Koristeći ova dva granična uslova određuje se potreban red filtra za zadovoljavanje postavljenih zahteva i on je dat izrazom:

$$n = \frac{\log\left[g + \sqrt{g^2 - 1}\right]}{\log\left[\Omega_s + \sqrt{\Omega_s^2 - 1}\right]}$$ gde je: $$g = \frac{\sqrt{10^{0,1A\min} - 1}}{\sqrt{10^{0,1A\max} - 1}} \quad i \quad \Omega_s = \frac{\omega_s}{\omega_p}$$

Chebyshevljeva aproksimacija

Zaokruživanjem izračunate vrednosti za red filtra na prvi veći ceo broj, prenosna funkcija Chebyshevljevog NF prototipskog filtra se može napisati korišćenjem polinoma iz Tabele 2 za odgovarajući red filtra, koja se sastoji iz niza podtabela za različite vrednosti maksimalno-dozvoljenog slabljenja u propusnom opsegu A_{max}. Ukoliko u Tabeli 2 ne postoji podtabela za željeno A_{max} treba uzeti prvu podtabelu za A_{max} koje je nešto manje od željenog:

A_{max}=0,25dB Tabela 2

n	Imenilac H(S)	Brojilac H(S)
1	S+4,10811	4,10811
2	S^2+1,79668S+2,11403	2,05403
3	(S^2+0.76722S+1,33863)(S+0,76722)	1,02702
4	(S^2+0,42504S+1,16195)(S^2+1,02613S+0,45485)	0,51352
5	(S^2+0,27005S+1,09543)(S^2+0,70700S+0,53642)(S+0,45485)	0,25676

Chebyshevljeva aproksimacija

A_{max}=0,5dB

n	Imenilac H(S)	Brojilac H(S)
1	$S+2,86278$	2,86278
2	$S^2+1,42562S+1,51620$	1,43138
3	$(S^2+0.62646S+1,14245)(S+0,62646)$	0,71570
4	$(S^2+0,35071S+1,06352)(S^2+0,84668S+0,35641)$	0,35785
5	$(S^2+0,22393S+1,03578)(S^2+0,58625S+0,47677)(S+0,36233)$	0,17892

A_{max}=1dB

n	Imenilac H(S)	Brojilac H(S)
1	$S+1,96523$	1,96523
2	$S^2+1,09773S+1,10251$	0,98261
3	$(S^2+0.49417S+0,99420)(S+0,49417)$	0,49130
4	$(S^2+0,27907S+0,98650)(S^2+0,67374S+0,27940)$	0,24565
5	$(S^2+0,17892S+0,98831)(S^2+0,46841S+0,42930)(S+0,28949)$	0,12283

Denormalizacija se izvodi smenom: $S = \dfrac{s}{\omega_p}$

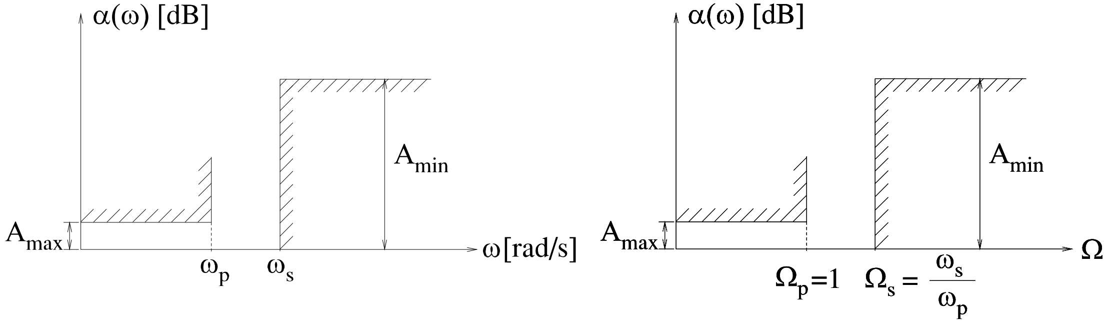
Frekvencijske transformacije

Kao što je već rečeno, zahteve koji se postavljaju za pojedine tipove filtara treba najpre svesti na prototipski NF filtar, odrediti prenosnu funkciju prototipskog filtra, a zatim izvršiti inverznu transformaciju za dobijanje prenosne funkcije željenog filtra.

Frekvencijske transformacije
Filtar propusnik niskih frekvencija

U slučaju NF filtra vrši se samo normalizacija frekvencijske ose smenom: $\Omega_p = \omega / \omega_p$

a dati gabarit se preslikava tako da je: $\Omega_p = \dfrac{\omega_p}{\omega_p} = 1 \qquad \Omega_s = \dfrac{\omega_s}{\omega_p}$

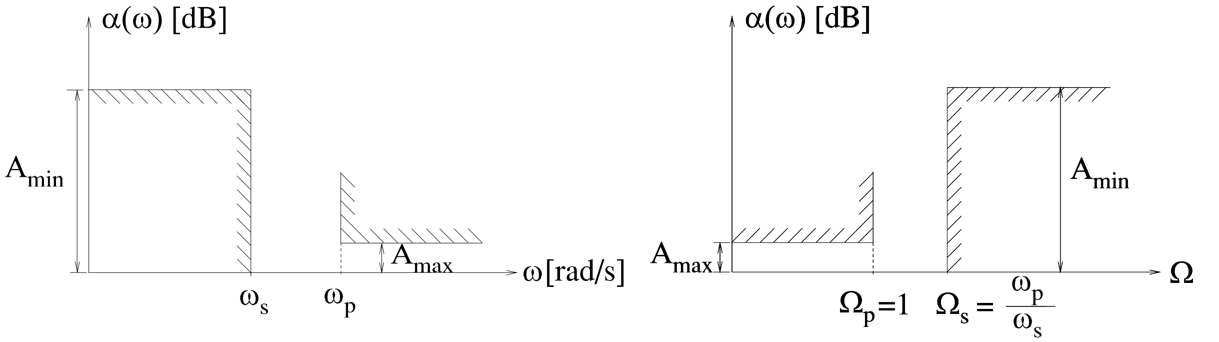


Pošto se za dobijeni gabarit prototipskog NF filtra odredi odgovarajuća prenosna funkcija $H(S)$, prenosna funkcija filtra propusnika niskih frekvencija se dobija smenom:

$$S = \frac{s}{\omega_p} \qquad H_{NF}(s) = H(S)\Big|_{S=\frac{s}{\omega_p}}$$

Frekvencijske transformacije
Filtar propusnik visokih frekvencija

U slučaju VF filtra najpre treba izvršiti frekvencijsku transformaciju tako da se zadati gabarit preslikava tako da je: $\Omega_p = 1 \quad \Omega_s = \dfrac{\omega_p}{\omega_s}$



Pošto se za dobijeni gabarit prototipskog NF filtra odredi odgovarajuća prenosna funkcija $H(S)$, prenosna funkcija filtra propusnika visokih frekvencija se dobija smenom:

$$S = \frac{\omega_p}{s} \qquad H_{VF}(s) = H(S)\Big|_{S=\frac{\omega_p}{s}}$$

Frekvencijske transformacije
Filtar propusnik opsega frekvencija

U slučaju filtra propusnika opsega frekvencija najpre treba ispitati da li postoji geometrijska simetrija, tj. da li je ispunjen uslov da je proizvod graničnih frekvencija propusnog opsega jednak proizvodu graničnih frekvencija nepropusnog opsega:

$$\omega_0^2 = \omega_1\omega_2 = \omega_3\omega_4$$

gde je ω_0 centralna frekvencija propusnog opsega. Ukoliko ovaj uslov nije ispunjen moraju se izračunati nove vrednosti graničnih frekvencija nepropusnog opsega:

$$\omega_3^{'} = \frac{\omega_0^2}{\omega_4} \quad i \quad \omega_4^{'} = \frac{\omega_0^2}{\omega_3}$$

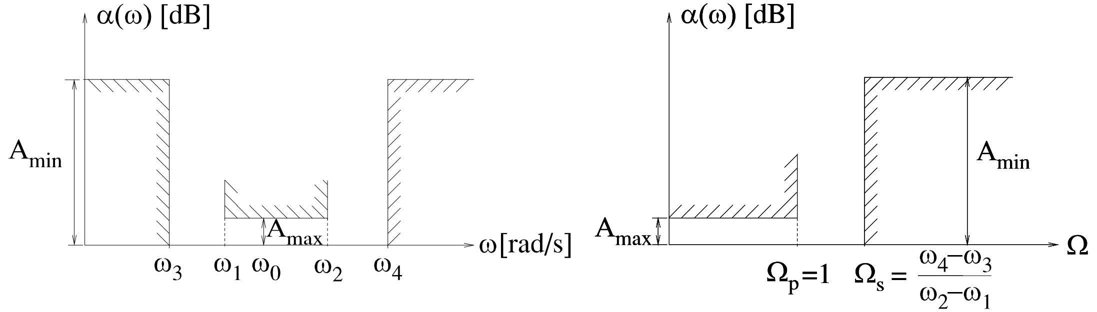
a zatim odabrati onu novu graničnu frekvenciju čijim se korišćenjem prelazna zona sužava, što predstavlja strožiji uslov od postavljenog.

Frekvencijske transformacije

Filtar propusnik opsega frekvencija

Zatim se frekvencijska transformacija vrši tako da se zadati gabarit preslikava u gabarit prototipskog NF filtra (podrazumeva se da, ako ne postoji geometrijska simetrija, treba uzeti odabranu novu vrednost jedne od graničnih frekvencija nepropusnog opsega) tako da je:

$$\Omega_p = 1 \qquad \Omega_s = \frac{\omega_4 - \omega_3}{\omega_2 - \omega_1}$$



Pošto se za dobijeni gabarit prototipskog NF filtra odredi odgovarajuća prenosna funkcija H(S), prenosna funkcija filtra propusnika opsega frekvencija se dobija smenom:

$$S = \frac{s^2 + \omega_0^2}{B \cdot s}, \; B = \omega_2 - \omega_1 \qquad H_{PO}(s) = H(S)\Big|_{S=\frac{s^2+\omega_0^2}{B \cdot s}}$$

Frekvencijske transformacije

Filtar nepropusnik opsega frekvencija

U slučaju filtra nepropusnika opsega frekvencija, kao i u slučaju filtra propusnika opsega frekvencija, najpre treba ispitati da li je ispunjen uslov geometrijske simetrije, tj. da li je proizvod graničnih frekvencija propusnog opsega jednak proizvodu graničnih frekvencija nepropusnog opsega:

$$\omega_0^2 = \omega_1\omega_2 = \omega_3\omega_4$$

gde je ω_0 centralna frekvencija nepropusnog opsega. Ukoliko ovaj uslov nije ispunjen moraju se izračunati nove vrednosti graničnih frekvencija nepropusnog opsega:

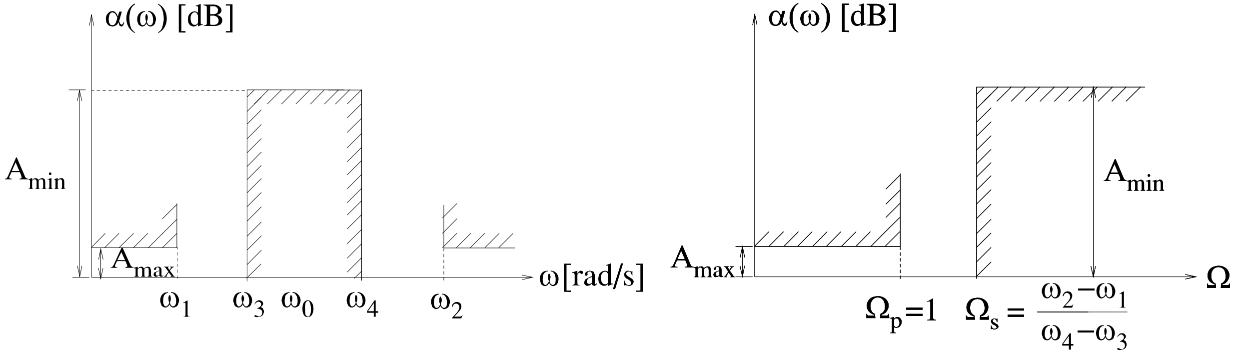
$$\omega_3^{'} = \frac{\omega_0^2}{\omega_4} \quad i \quad \omega_4^{'} = \frac{\omega_0^2}{\omega_3}$$

a zatim odabrati onu novu graničnu frekvenciju čijim se korišćenjem prelazna zona sužava, što predstavlja strožiji uslov od postavljenog. Zatim se frekvencijska transformacija vrši tako da se zadati gabarit preslikava u gabarit prototipskog NF filtra (ako nije ispunjen uslov geometrijske simetrije, treba uzeti odabranu novu vrednost jedne od graničnih frekvencija nepropusnog opsega) tako da je:

$$\Omega_p = 1 \qquad \Omega_s = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_4 - \omega_3}$$

Frekvencijske transformacije

Filtar nepropusnik opsega frekvencija



Pošto se za dobijeni gabarit prototipskog NF filtra odredi odgovarajuća prenosna funkcija H(S), prenosna funkcija filtra nepropusnika opsega frekvencija se dobija smenom:

$$S = \frac{B \cdot s}{s^2 + \omega_0^2}, \; B = \omega_2 - \omega_1 \qquad H_{NO}(s) = H(S)\Big|_{S=\frac{B \cdot s}{s^2+\omega_0^2}}$$